

# 2015年 東大文系数学 第4問

(1) n回目にAが出る時、その直前はAかB  
 であるが  
 コインが表が出た時の1文字目のAなのか、  
 2文字目のAなのかで状況が変わる。  
 ⇒ 別の場合と区別して、ここで区別をなくす  
 混乱しやすい時、区別に場合分けをするのは  
 数学ではよくあります。

## 設定変更

- 表が出たら、ACと書く
- 裏が出たら、Bと書く

後で混乱が  
 減るよ。  
 先は区別が  
 と変更し。

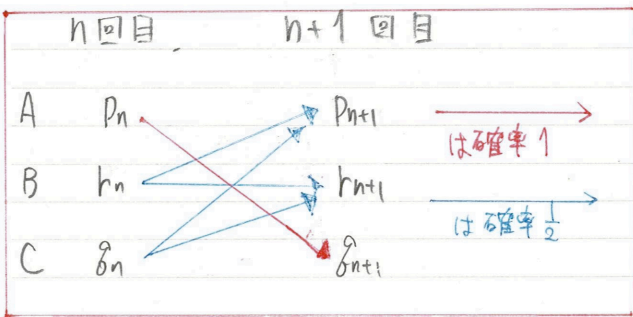
n番目の文字がAかCとなる確率を求めよ。

確率漸化式の問題は、遷移図を描く

n回コインを投げ、左からn番目が、  
 Aである確率を  $P_n$   
 Cである :  $g_n$   
 Bである :  $h_n$  とする。

確率漸化式を  
 作り準備

この時遷移図を描く



よって

$$\begin{cases} P_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}h_n & \text{遷移図から漸化式を立式} \\ g_{n+1} = P_n & \text{これは解けば終わり} \\ h_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}h_n \end{cases}$$

また  $P_n + g_n + h_n = 1$  であり、求めた確率は  
 $P_n + g_n$  であり、  
 $h_n$  は消去

$$h_n = 1 - P_n - g_n \text{ からの}''$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}(1 - P_n - g_n)$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1} = -\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{よく見ると形は似た!}$$

特性方程式

$$x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ より } x = \frac{1}{3} \text{ からの}''$$

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(P_n - \frac{1}{3}) \text{ と変形ができる}$$

これは、(初項  $P_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$   
 (公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列) からの

$$P_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$P_n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

また  $g_{n+1} = P_n$  より

$$g_n = P_{n-1} = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}$$

よって、  
 $P_n + g_n = \left(\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\right)$

$P_{n-1}$  が登場  
 (ここを check.)  
 $= \dots = \frac{1}{3} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$

$n=1$  の時  $\frac{1}{3} \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$  より成立する。

求める確率は  $\frac{1}{3} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$

(2)  $n-1$ 番目がAで、n番目がB、  
 というときは、設定変更後の  
 $g_{n-1}$ 番目がCで、n番目がBの  
 表現。

よって  $g_{n-1} \times \frac{1}{2}$  を計算すればよい。

$$\left\{ \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \frac{1}{3} \right\} \times \frac{1}{2}$$

$$= \dots = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}$$